УДК 517.983.23

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО МОМЕНТОВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ СТЕПЕНЕЙ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathcal{A}$ — плотно определенный в X линейный замкнутый оператор со значениями в X. Предполагается, что в области $\Omega(a,\alpha) \ni 0$ $(a>0, \alpha \in \mathbb{R})$, уравнения границы $\Gamma(a,\alpha)$ которой

$$\lambda = -s \pm ia(s+1)^{\alpha},\ (s \geq 0), \qquad \lambda = ae^{i\varphi}\ (|\varphi| \leq \pi/2),$$

справедлива оценка

$$\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leq C_0(|\lambda|+1)^{-\gamma} \qquad (C_0>0, \gamma \leq \check{\alpha} = \min\{\alpha, 1\}), \tag{1}$$

где $\mathcal{R}(\lambda) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$; $\mathcal{E}$ — единичный в X оператор.

Это позволяет ввести комплексные степени оператора $\mathcal{A}$ [1]. При различных ограничениях на параметры в работе устанавливаются неравенства, близкие к неравенствам моментов для комплексных степеней операторов и имеющие вид

$$\|\mathcal{A}^z x\| \leq C\|\mathcal{A}^w x\|^{\lambda}\|\mathcal{A}^v x\|^{1-\lambda}\chi\left(\frac{\|\mathcal{A}^v x\|}{\|\mathcal{A}^w x\|}\right). \tag{2}$$

Здесь $x \in D(\mathcal{A}^v)$,

$$\mathrm{Re}\,(w-v) < \mathrm{Re}\,(z-v) < \gamma - 1, \tag{3}$$

функция χ удовлетворяет при $s \geq 0$ соотношению $1 \leq \chi(s) \leq \ln(s+3)$, не зависит от x, но зависит от остальных параметров.

В предположении, что оценка (1) справедлива при $\gamma \in (0,1]$ в угловом секторе, содержащем положительную вещественную полуось, были введены дробные степени оператора $\mathcal{A}$ и получены неравенства моментов для них (см, например, [2–7]). Эти неравенства установлены с использованием интегральных представлений степеней $\mathcal{A}^z$ оператора $\mathcal{A}$ и оценок $\|\mathcal{A}^z\mathcal{R}^m(\lambda)\|$. В работах [2–5] рассмотрен случай $\gamma = 1$, а в [6,7] — случай $\gamma \in (0,1]$. В [8] для положительного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве с использованием спектральной теории операторов было установлено неравенство моментов для вещественных степеней с константой $C = 1$.

В данной работе оценка (1) с произвольным $\gamma \leq 1$ предполагается выполненной в области $\Omega(a,\alpha)$, которая при $\alpha < 1$ не содержит углового сектора.

С помощью интегральных представлений и оценок $\|\mathcal{A}^z\mathcal{R}^m(\lambda)\|$, полученных авторами в [9, 10], в данной работе устанавливаются неравенства (2) в ситуациях, в которых ранее эти неравенства не были известны. Отдельно рассмотрен случай нормального оператора в гильбертовом пространстве. Установлена эквивалентность двух определений степени нормального оператора (с использованием интеграла типа Коши и спектрального представления). По аналогии с [8] доказано неравенство моментов.

2. Сначала рассмотрим случай банахова пространства. Нами будет использовано вытекающее из теоремы 1 работы [9]

Утверждение 1. *Пусть* $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z < m + \gamma - 1$. *Тогда существует такое число* $C > 0$, *что при всех* $s \geq 0$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{A}^z\mathcal{R}^m(-s)\| \leq C(s+1)^q\Phi(s),$$

где

$$q = \max\{-m,\ \operatorname{Re} z - \gamma - (m-1)\breve{\alpha}\}$$

$$\Phi(s) = \begin{cases} \ln(s+3), & \text{если } z \notin \mathbb{Z} \text{ и выполнено одно из условий:} \\ & \text{1) } \operatorname{Re} z = \gamma - 1,\ m = 1 \text{ или } \alpha \geq 1, \\ & \text{2) } \gamma - 1 < \operatorname{Re} z < \gamma,\ m = 1,\ \alpha < 1, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Неравенство (2) установим сначала для $v = 0$. Заметим, что в этом случае из (3) следует, что операторы $\mathcal{A}^z$, $\mathcal{A}^w$ ограничены на X.

Введем функцию φ формулой

$$\varphi(\ell) = \gamma - 1 - (\ell - 1)(1 - \breve{\alpha}). \tag{4}$$

Утверждение 2. *Пусть* z, w, $u \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Re} u - \ell \leq \operatorname{Re} w < \operatorname{Re} z < \min\{\operatorname{Re} u, \varphi(\ell)\}, \tag{5}$$

$$\operatorname{Re}(u - v) < \ell + \gamma - 1 \text{ при } u - w \notin \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Тогда существует такое число $C = C(z, w, \ell, u)$, *что при всех* $x \in X$ *имеет место неравенство* (2) *с* $v = 0$, $\lambda = \lambda(z, w, \ell, u)$, $\chi(s) = \chi(s; w, \ell, u)$, *где*

$$\lambda(z, w, \ell, u) = \frac{\operatorname{Re} z - \min\{\operatorname{Re} u, \varphi(\ell)\}}{\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} u + \max\{\operatorname{Re} u, \varphi(\ell)\}}, \tag{7}$$

$$\chi(s; w, \ell, u) = \begin{cases} \ln(s+3), & \text{если выполнено хотя бы одно из условий:} \\ & \text{1) } u - w \notin \mathbb{Z},\ \operatorname{Re}(u - w) < \gamma,\ \ell = 1,\ \alpha < 1, \\ & \text{2) } u \notin \mathbb{Z},\ \operatorname{Re} u = \gamma - 1, \text{ и } \ell = 1 \text{ или } \alpha \geq 1, \\ & \text{3) } u \notin \mathbb{Z},\ \gamma - 1 < \operatorname{Re} u < \gamma,\ \ell = 1,\ \alpha < 1, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. В условиях утверждения согласно [10, утверждение 4] справедливо представление

$$\mathcal{A}^z x = C_1 \int_0^\infty s^{z-u+\ell-1} \mathcal{R}^\ell(-s) \mathcal{A}^u x \, ds \qquad (x \in D(\mathcal{A}^u)) \tag{9}$$

с некоторым $C_1 = C_1(z, u, \ell)$, не зависящим от x. Заметим, что оператор $\mathcal{A}^u \mathcal{R}^\ell(-s)$ является продолжением оператора $\mathcal{R}^\ell(-s)\mathcal{A}^u$ и непрерывен на X, так как $\operatorname{Re} u - \ell \le \operatorname{Re} w < \varphi(\ell) \le \gamma - 1$ [1]. Кроме того, в силу утверждения 1 и формулы (5), интеграл $\int_0^\infty s^{z-u+\ell-1} \mathcal{A}^u \mathcal{R}^\ell(-s)\, ds$ сходится в равномерной операторной топологии к непрерывному на X оператору. Поскольку оператор $\mathcal{A}^z$ непрерывен ($\operatorname{Re} z < \varphi(\ell) \le \gamma - 1$), а оператор $\mathcal{A}^u$ плотно определен на X, то из (9) вытекает равенство

$$\mathcal{A}^z = C_1 \int_0^\infty s^{z-u+\ell-1} \mathcal{A}^u \mathcal{R}^\ell(-s)\, ds.$$

Тогда для любых $t \in (0, +\infty)$ и $x \in X$

$$\mathcal{A}^s = C_1 \left[\int_0^t s^{z-u+\ell-1} \mathcal{A}^{u-w} \mathcal{R}^\ell(-s)\, ds \mathcal{A}^w x + \int_t^\infty s^{z-u+\ell-1} \mathcal{A}^u \mathcal{R}^\ell(-s)\, ds\, x \right].$$

Поэтому с учетом утверждения (1) имеем

$$\|\mathcal{A}^z x\| \le C_1 \left[\int_0^t s^{\operatorname{Re}(z-u)+\ell-1} \|\mathcal{A}^{u-w} \mathcal{R}^\ell(-s)\|\, ds \|\mathcal{A}^w x\| + \right.$$

$$\left. + \int_t^\infty s^{\operatorname{Re}(z-u)+\ell-1} \|\mathcal{R}^\ell(-s)\|\, ds \|x\| \right] \le C_2 \left[\varphi_1(t) \|\mathcal{A}^w x\| + \varphi_2(t) \|x\| \right],$$

где C_2 не зависит, ни от t, ни от x, а функции φ_1, φ_2 задаются формулами:

$$\varphi_1(t) = \int_0^t s^\theta (s+1)^{\beta_1} \chi_1(s)\, ds, \quad \varphi_2(t) = \int_t^{+\infty} s^\theta (s+1)^{\beta_2} \chi_2(s)\, ds,$$

$\chi_1(s) = \Phi(s; u-w, \ell)$, $\quad \chi_2(s) = \Phi(s; u, \ell)$, $\quad \theta = \operatorname{Re}(z-u) + \ell - 1$,
$\beta_1 = \beta(u-w, \ell)$, $\quad \beta_2 = \beta(u, \ell) = \operatorname{Re} u - \gamma - (\ell-1)\min\{\alpha, 1\}$.
Из (4) следует, что $\theta > -1$, $\theta + \beta_1 > -1$, $\theta + \beta_2 < -1$. Полагая

$$\psi_i(t) = (t+1)^{\theta+\beta_i+1} \chi_i(t) \qquad (i = 1, 2),$$

замечаем, что функции $\varphi_i(i)/\psi_i(t)$ имеют конечные пределы в нуле и в бесконечности, т. е. при некоторых $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ и всех $t > 0$ $\varphi_i(t) \le C_{2+i}\psi_i(t)$ $(i = 1, 2)$. Таким образом,

$$\|\mathcal{A}^z x\| \le C_5 \left[(t+1)^{\theta+\beta_1+1} \|\mathcal{A}^w x\| + (t+1)^{\theta+\beta_2+1} \|x\| \right] \max\{\chi_1(t), \chi_2(t)\} \tag{10}$$

(C_5 не зависит от x и t). Наименьшее значение (по t) правой части не превосходит (при $x \neq 0$) ее значения при $t+1 = (\|x\|/\|\mathcal{A}^w x\|)^{1/(\beta_1-\beta_2)}$. Подставляя указанное значение t в (10), получаем заключение утверждения.

Лемма 1. *Пусть при некоторых* $C = \overline{C} > 0$ *и* $\lambda = \overline{\lambda} \in (0,1)$ *и всех* $x \in X$ *справедливо неравенство* (2). *Тогда для любого* $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ *найдется* $C > 0$, *что при всех* $x \in X$

$$\|\mathcal{A}^z x\| \leq C \|\mathcal{A}^w x\|^{\lambda} \|x\|^{1-\lambda}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$, $\widetilde{\lambda} \in (\lambda, \overline{\lambda})$. Так как оператор $\mathcal{A}^w$ непрерывен, то при всех $x \in X$ $\|\mathcal{A}^w x\| \leq \|\mathcal{A}^w\| \|x\|$. Поскольку при некотором $\widetilde{C} > 0$ и всех $t \geq \|\mathcal{A}^w\|^{-1}$ $\ln(2+t) \leq \widetilde{C} t^{\widetilde{\lambda}-\lambda}$, то

$$\chi\left(\frac{\|x\|}{\|\mathcal{A}^w x\|}\right) \leq \widetilde{C}\left(\frac{\|x\|}{\|\mathcal{A}^w x\|}\right)^{\widetilde{\lambda}-\lambda}.$$

Отсюда имеем

$$\|\mathcal{A}^z x\| \leq \overline{C} \|\mathcal{A}^w x\|^{\widetilde{\lambda}} \|\mathcal{A}^w x\|^{\overline{\lambda}-\widetilde{\lambda}} \|x\|^{1-\overline{\lambda}} \chi\left(\frac{\|x\|}{\|\mathcal{A}^w x\|}\right) \leq$$

$$\leq \overline{C} \|\mathcal{A}^w\|^{\overline{\lambda}-\widetilde{\lambda}} \widetilde{C} \|\mathcal{A}^w x\|^{\widetilde{\lambda}} \|x\|^{1-\widetilde{\lambda}} \left(\frac{\|x\|}{\|\mathcal{A}^w x\|}\right)^{\widetilde{\lambda}-\lambda} = C \|\mathcal{A}^w x\|^{\lambda} \|x\|^{1-\lambda},$$

где $C = \overline{C}\widetilde{C}\|\mathcal{A}^w\|^{\overline{\lambda}-\widetilde{\lambda}}$. Лемма доказана.

Замечание. *Если* $\chi = 1$ *при* $\lambda = \overline{\lambda}$, *то можно взять* $C = \overline{C}\|\mathcal{A}^w\|^{\overline{\lambda}-\lambda}$.

Из леммы следует, что при фиксированных z, w достаточно получать неравенство (2) с возможно бóльшим $\lambda \in (0,1)$. При этом зависимость C от остальных параметров не изучается.

В следующих далее утверждениях 3, 4 в случаях $\alpha \geq 1$ и $\alpha < 1$ будут указаны максимально возможные λ среди всех чисел $\lambda(z, w, \ell, u)$, описываемых формулой (7), при фиксированных z, w и различных ℓ, u, удовлетворяющих условиям (5)–(6).

При $z, w \in \mathbb{C}$ введем множество $D = D(z,w)$ пар $(\ell, u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям (5)–(6). Пусть

$$\Lambda(z,w) = \max\{\lambda(z,w;\ell,u) : (\ell,u) \in D(z,w)\},$$

в предположении, что $D(z,w) \neq \varnothing$ (в дальнейшем будет показано, что в этом случае значение $\Lambda(z,w)$ существует).

Утверждение 3. *Пусть* $\alpha \geq 1$, $\mathrm{Re}\, w < \mathrm{Re}\, z < \gamma - 1$. *Тогда* $D \neq \varnothing$ *и при некотором* C *и всех* $x \in X$ *имеет место неравенство* (11) *с показателем* $\lambda = \Lambda(z, w) = (\mathrm{Re}\, z - \gamma + 1)/\mathrm{Re}\, w$.

Доказательство. При $\alpha \geq 1$ $\varphi(\ell) = \gamma - 1$, т. е. функция $\lambda(z, w; \ell, u)$, определенная формулой (7), не зависит от ℓ. Кроме того, она не убывает с ростом $\mathrm{Re}\, u$ и принимает наибольшее значение $(\mathrm{Re}\, z - \gamma + 1)/\mathrm{Re}\, w$ при всех u с $\mathrm{Re}\, u \geq \gamma - 1$. Возьмем $u > \gamma - 1$, $\ell > \mathrm{Re}\,(u - w) - \gamma + 1$. Тогда $(\ell, u) \in D$ и $\Lambda(z, w) = \lambda(z, w; \ell, u) = (\mathrm{Re}\, z - \gamma + 1)/\mathrm{Re}\, w$, а $\chi(s; z, w, \ell, u) = 1$. Утверждение доказано.

Пусть $\alpha < 1$,

$$\ell_0 = \ell_0(w) = \max\{\ell \in \mathbb{Z} : \mathrm{Re}\, w + \ell < \varphi(\ell)\} \tag{12}$$

(такое ℓ_0 существует и единственно в силу убывания в строгом смысле функции $\varphi(\ell) - \ell$ на $\mathbb{Z}$ от $+\infty$ до $-\infty$). Поскольку $\mathrm{Re}\, w < \gamma - 1 < \gamma - \alpha = \varphi(0)$, то $\ell_0 \geq 0$. При этом для $\ell \in \mathbb{N}$

$$\min\{\mathrm{Re}\, w + \ell, \varphi(\ell)\} = \begin{cases} \mathrm{Re}\, w + \ell, & \ell \leq \ell_0, \\ \varphi(\ell), & \ell \geq \ell_0 + 1, \end{cases}$$

т. е. $\max\limits_{\ell \in \mathbb{N}} \min\{\mathrm{Re}\, w + \ell, \varphi(\ell)\} = \max\{\mathrm{Re}\, w + \ell_0, \varphi(\ell_0 + 1)\}$. Таким образом, условие $D \neq \varnothing$ эквивалентно условию $\mathrm{Re}\, z < \max\{\mathrm{Re}\, w + \ell_0, \varphi(\ell_0 + 1)\}$.

Утверждение 4. *Пусть* $\alpha < 1$,

$$\mathrm{Re}\, w < \mathrm{Re}\, z < \max\{\mathrm{Re}\, w + \ell_0, \varphi(\ell_0 + 1)\}. \tag{13}$$

тогда при некотором C *и всех* $x \in X$ *имеет место неравенство* (2) *с*

$$v = 0, \quad \ell_0 = \ell_0(w), \quad \lambda = \Lambda(z, w) = \max\left\{\frac{\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, w - \ell_0}{\varphi(\ell_0) - \ell_0}, \ \frac{\mathrm{Re}\, z - \varphi(\ell_0 + 1)}{\mathrm{Re}\, w}\right\}, \tag{14}$$

$$\chi(s) = \chi(s; w, 1, w + 1) = \begin{cases} \ln(s + 3), & \text{если } w \notin \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Re}\, w \geq \gamma - 2, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Правая часть в (7) не убывает с ростом $\mathrm{Re}\, u$ при условии $\mathrm{Re}\, w < \mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, u$. Пусть $D(z, w, \ell) = \{u : (\ell, u) \in D(z, w)\}$. Из определения $D(z, w)$ для тех $\ell \in \mathbb{N}$, для которых $D(z, w, \ell) \neq \varnothing$, имеем при фиксированных z, w

$$\widetilde{\lambda}(\ell) = \sup\{\lambda(z, w, \ell, u) : u \in D(z, w, \ell)\} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, w - \ell}{\varphi(\ell) - \ell}, & \ell \leq \ell_0, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{Re}\, z - \varphi(\ell)}{\mathrm{Re}\, w}, & \ell \geq \ell_0 + 1. \end{cases}$$

Учитывая, что правая часть возрастает по ℓ на множестве $[1,\ell_0]\cap\mathbb{N}$ и убывает на $[\ell_0+1,+\infty)\cap\mathbb{N}$, получаем, что ее супремум по $\ell\in\mathbb{N}$ достигается хотя бы на одном из чисел ℓ_0, ℓ_0+1. При этом (с учетом (12)), если $\operatorname{Re} z\geq\varphi(\ell_0+1)$, то $(\ell_0,w+\ell_0)\in D$ и $\widetilde{\lambda}(\ell_0+1)\leq 0<\widetilde{\lambda}(\ell_0)$, а если $\operatorname{Re} z\geq\operatorname{Re} w+\ell_0$, то $(\ell_0+1, w+\ell_0+1)\in D$ и $\widetilde{\lambda}(\ell_0)\leq 0<\widetilde{\lambda}(\ell_0+1)$. Если же $\operatorname{Re} z<\min\{\operatorname{Re} w+\ell_0,\varphi(\ell_0+1)\}$, то $(\ell_0,w+\ell_0)$, $(\ell_0+1,w+\ell_0+1)\in D$. Из предыдущих рассуждений следует, что $\lambda=\Lambda(z,w)$ имеет смысл и задается формулой (14).

Заметим, что при $\ell_0\geq 1$ $\operatorname{Re} w+\ell_0<\varphi(\ell_0)\leq\varphi(1)=\gamma-1$, т.е. $\operatorname{Re} w<\gamma-2$ и по утверждению 2 ($\ell=\ell_0$ или $\ell=\ell_0+1$, $u=w+\ell$) $\chi(s)=1$.

Если $\ell_0=0$, то $\operatorname{Re} w+1\geq\varphi(1)=\gamma-1$, т.е. $\operatorname{Re} w\geq\gamma-2$. Подставляя в (8) $\ell=\ell_0+1=1$, $u=w+\ell=w+1$, получаем, что $\chi(s)=\ln(s+2)$, при $w\notin\mathbb{Z}$. Таким образом, функция χ задается формулой (15). Утверждение доказано.

Из утверждений 3, 4, если в них заменить z, w, x на $z-v$, $w-v$, $\mathcal{A}^v x$ соответственно, вытекает

Теорема. *Пусть тройка чисел (w,z,v) удовлетворяет неравенствам (3), а если $\alpha<1$, то и неравенству*

$$\operatorname{Re} z<\max\{\operatorname{Re} w+\ell_0,\operatorname{Re} v+\varphi(\ell_0+1)\} \tag{16}$$

с $\ell_0=\ell_0(w-v)$. Тогда при некотором $C>0$ и всех $x\in D(\mathcal{A}^v)$ справедливо неравенство (2) с

$$\lambda=\lambda^0=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re}(z-v)-\gamma+1}{\operatorname{Re}(w-v)} & \text{при } \alpha\geq 1,\\[2ex] \max\left\{\dfrac{\operatorname{Re}(z-w)-\ell_0}{\varphi(\ell_0)-\ell_0},\dfrac{\operatorname{Re}(z-v)-\varphi(\ell_0+1)}{\operatorname{Re}(w-v)}\right\} & \text{при } \alpha<1,\end{cases} \tag{17}$$

$$\chi(s)=\begin{cases}\ln(s+3), & \text{если } w-v\notin\mathbb{Z},\ \operatorname{Re}(w-v)\geq\gamma-2,\ \alpha<1,\\ 1, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Замечание. *При $\alpha\geq 1$ нижняя строка формулы (17) дает тот же результат, что и верхняя строка этой формулы (это устанавливается непосредственной проверкой).*

Следствие. *При условии (3) при некоторых $\lambda\in(0,1)$ и $C>0$ на $D(\mathcal{A}^v)$ выполнено неравенство (2) с $\chi(s)=1$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\alpha<1$. Пусть z, w, v удовлетворяют (3) и $k_0=\max\{k\in\mathbb{Z}:\ \operatorname{Re} w+(k+1)/2\leq\operatorname{Re} z\}$. Каждая из троек $(w+k/2, w+(k+1)/2, v)$ при $0 \le k \le k_0$ удовлетворяет (3), (16) (если ℓ_0, найденное по числу $w+k/2$, равно нулю, то максимум в (16) равен $\operatorname{Re} v + \varphi(\ell_0+1) = \operatorname{Re} v + \gamma - 1$). Кроме того, тройка $(w+(k_0+1)/2, z, v)$ также удовлетворяет (3), (16). Применим теорему к каждой из перечисленных троек. Пусть $\lambda_k \in (0,1)$, $C_k > 0$ — числа, о которых говорится в теореме, найденные по соответствующим тройкам. Тогда справедливо (2) с $\lambda^0 = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k_0+1}$, $C = C_0 C_1 \ldots C_{k_0+1}$, $0 \le \chi(s) \le [\ln(s+2)]^{k_0+2}$, т. е. при некоторых $C > 0$, $\lambda \in (0, \lambda^0)$, $\chi = 1$ имеет место (2). Следствие доказано.

3. В случае гильбертова пространства через $\mathcal{A}'$ обозначим сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор.

Утверждение 5. *Верно равенство*

$$(\mathcal{A}^*)^z = (\mathcal{A}^z)^* . \tag{18}$$

Если $X = H$ — гильбертово пространство, то

$$\big(\mathcal{A}'\big)^{\overline{z}} = (\mathcal{A}^z)' . \tag{19}$$

Доказательство. Сначала для обоих утверждений рассмотрим случай, когда $\operatorname{Re} z < \gamma - 1$. Потом оба утверждения докажем в общем случае, когда $z \in \mathbb{C}$.

1) $\operatorname{Re} z < \gamma - 1$. Тогда

$$\mathcal{A}^z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \mathcal{R}(\mathcal{A},\mu)\, d\mu \qquad (\mu^z = \exp(z\ln\mu),\ |\arg\mu| < \pi).$$

Возьмем произвольно $g \in X^*$ и $x \in X$. Имеют место равенства

$$\langle x, (\mathcal{A}^z)^* g\rangle = \langle \mathcal{A}^z x, g\rangle = g(\mathcal{A}^z x) = \frac{1}{2\pi i} g \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \mathcal{R}(\mathcal{A},\mu) x\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z g\mathcal{R}(\mathcal{A},\mu) x\, d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \mathcal{R}^*(\mathcal{A},\mu) g x\, d\mu,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \mathcal{R}(\mathcal{A}^*,\mu) g x\, d\mu = \langle x, (\mathcal{A}^*)^z g\rangle.$$

Отсюда вытекает (18).

Теперь докажем (19) в случае гильбертова пространства H. Возьмем произвольно $x \in H$, $g \in H$. Тогда

$$\big(x, (\mathcal{A}^z)' g\big) = (\mathcal{A}^z x, g) = \left(\frac{1}{2\pi i} g \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \mathcal{R}(\mathcal{A},\mu) x\, \mathrm{d}\mu, g\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\left(\mathcal{R}(\mathcal{A},\mu)x,g\right)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\left(x,\mathcal{R}(\mathcal{A}',\overline{\mu})g\right)\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\overline{\left(\mathcal{R}(\mathcal{A}',\overline{\mu})g,x\right)}\,\mathrm{d}\mu = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \nu^{\overline{z}}\left(\mathcal{R}(\mathcal{A}',\nu)g,x\right)\mathrm{d}\nu} =$$
$$= \left(x,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \nu^{\overline{z}}\mathcal{R}(\mathcal{A}',\nu)g\mathrm{d}\nu\right) = \left(x,(\mathcal{A}')^{\overline{z}}g\right).$$

Таким образом, имеет место (19).

2) $z \in \mathbb{C}$ произвольно. Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathrm{Re}\,z - n < \gamma - 1$. Так как $\mathcal{A}^z = \overline{\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n}$, [1] то $(\mathcal{A}^z)^* = (\overline{\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n})^*$, а так как $\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n$ плотно определен, то $(\overline{\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n})^* = (\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n)^*$ [11]. Оператор $\mathcal{A}^{z-n}$ непрерывен, $\mathcal{A}^n$ плотно определен, т.е. ([11]) $(\mathcal{A}^{z-n}\mathcal{A}^n)^* = (\mathcal{A}^*)^n(\mathcal{A}^*)^{z-n} = (\mathcal{A}^*)^z$ и имеет место (18). Аналогично устанавливается (19). Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Пусть $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H, отрицательная вещественная полуось состоит из его регулярных точек, при некоторых $\gamma \le 1$, $M > 0$ и всех $s > 0$ имеет место неравенство $\|\mathcal{R}(\mathcal{A},-s)\| \le M(1+s)^{-\gamma}$. Пусть $\mathcal{B}$ — степень оператора $\mathcal{A}$, представляющая замыкание оператора $\mathcal{A}(z,n)$ $(\mathrm{Re}\,z < \gamma + n - 1)$, а $\mathcal{C}$ — степень нормального оператора, задаваемая формулой*

$$(\mathcal{C}x,y) = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \lambda^z\,dE_{x,y}(\lambda) \qquad (x \in D(\mathcal{C}), y \in H) \tag{20}$$

$(D(\mathcal{C}) = \{x \in H : \int_{\sigma(\mathcal{A})}|\lambda^z|^2\,dE_{x,x}(\lambda) < +\infty\}$, $\sigma(\mathcal{A})$ — спектр $\mathcal{A}$, $E_{x,y}(\lambda)$ — спектральная мера оператора $\mathcal{A}$). Тогда $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для целых z вывод утверждения справедлив (оба способа приводят к обычному определению целой степени оператора). Пусть $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два случая.

1) $\mathrm{Re}\,z < \gamma - 1$. При этом условии $\mathcal{B}$ непрерывен на H и

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\mathcal{R}(\mathcal{A},\mu)\,d\mu.$$

Рассмотрим для произвольного $x \in H$

$$(\mathcal{B}x,x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\mathcal{R}(\mathcal{A},\mu)x\,d\mu, x\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z\left(\mathcal{R}(\mathcal{A},\mu)x,x\right)\,d\mu.$$

Зададим кривую $\Gamma(\alpha,\gamma)$ уравнением $\mu = \mu(s)$, $s \in (\alpha,\beta)$, причем функция $\mu(s)$ на некотором $[c,d] \subset (\alpha,\beta)$ кусочно непрерывно дифференцируема, а на $(\alpha, c]$ и $[d, \beta)$ непрерывно дифференцируема. Применим формулу (20) к $\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mu) = (\mathcal{A} - \mu I)^{-1}$, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \left(\mathcal{R}(\mathcal{A}, \mu)x, x\right) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \mu^z \left[\int_{\sigma(\mathcal{A})} \frac{1}{\lambda - \mu}\, dE_{x,x}(\lambda)\right] d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} (\mu(s))^z \left[\int_{\sigma(\mathcal{A})} \frac{1}{\lambda - \mu(s)}\, dE_{x,x}(\lambda)\right] \mu'(s)\, ds.$$

Учитывая, что $E_{x,x}$ — неотрицательная мера, обоснуем возможность перестановки интегралов с помощью теоремы Фубини–Тонелли. Для этого достаточно проверить конечность интеграла

$$\int_{\sigma(\mathcal{A})} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \left|\frac{(\mu(s))^z\, \mu'(s)}{\lambda - \mu(s)}\right| ds\right] dE_{x,x}. \tag{21}$$

Рассмотрим внутренний интеграл $J(\lambda) = \int_\alpha^\beta \left|\frac{(\mu(s))^z \mu'(s)}{\lambda - \mu(s)}\right| ds$, $\lambda \in D(\mathcal{A})$. Воспользуемся оценкой: существует $\widetilde{C} > 0$ такое, что при всех $\mu \in \Gamma(\alpha, \gamma)$ $\rho(\mu, \sigma(\mathcal{A})) \geq \widetilde{C}\,(|\mu| + 1)^\gamma$. Тогда при некотором $C_1 > 0$ и всех $\mu \in \Gamma(\alpha, \gamma)$, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$

$$\left|\frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\right| \leq C_1 \frac{|\mu|^{\operatorname{Re} z}}{(|\mu| + 1)^\gamma},$$

т. е.

$$J(\lambda) \leq C_1 \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \frac{|\mu|^{\operatorname{Re} z}}{(|\mu| + 1)^\gamma}\, d\ell.$$

Так как $\operatorname{Re} z < \gamma - 1$, то последний интеграл сходится, а значит, интеграл $J(\lambda)$ ограничен на $\sigma(\mathcal{A})$. Заметим также, что интеграл $J(\lambda)$ сходится равномерно в некоторой окрестности каждой точки $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Поэтому функция $J(\lambda)$ непрерывна. Так как функция $J(\lambda)$ ограничена, то интеграл (21) сходится. Поэтому по теореме Фубини–Тонелли

$$(\mathcal{B}x, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\mathcal{A})} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\mu(s))^z\, \mu'(s)}{\lambda - \mu(s)}\, ds\right] dE_{x,x}(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\mathcal{A})} dE_{x,x}(\lambda) \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\, d\mu.$$

Пусть C_R — дуга окружности радиуса R с центром в нуле, концы которой лежат на $\Gamma(\alpha, \gamma)$, и ограничивающая вместе с $\Gamma(\alpha, \gamma)$ область D_R, не содержащую нуль. При некотором $C > 0$

$$\left|\int_{C_R} \frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\, d\mu\right| \leq \int_{C_R} \frac{|\mu|^{\operatorname{Re} z}}{|\mu| - |\lambda|}\, d\ell \leq C \frac{R^{\operatorname{Re} z}}{R - |\lambda|} 2\pi R \to 0 \ \text{ при } R \to +\infty,$$

так как $\mathrm{Re}\, z < \gamma - 1$. Поэтому

$$\int_{C_R} \frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\, d\mu \to 0,\ \ R \to +\infty$$

и по формуле Коши

$$\int\limits_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\, d\mu = \lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{\partial D_R} \frac{\mu^z}{\lambda - \mu}\, d\mu = 2\pi i \lambda^z.$$

Отсюда имеем

$$(\mathcal{B}x, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\mathcal{A})} dE_{x,x}(\lambda) \int_{\Gamma(\alpha,\gamma)} \frac{\mu^z}{\mu - \lambda}\, d\mu = \int_{\sigma(\mathcal{A})} \lambda^z\, dE_{x,x}(\lambda) = (\mathcal{C}x, x).$$

Таким образом, $D(\mathcal{C}) = H$, но $\mathcal{C}$ замкнут, т. е. $\mathcal{C}$ непрерывен и $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Утверждение доказано для $\mathrm{Re}\, z < \gamma - 1$.

2) $z \in \mathbb{C}$ произвольно. Тогда $\mathcal{A}^z = \mathcal{A}^n \mathcal{A}^{z-n}$ для степени оператора в смысле каждого из определений ($n \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathrm{Re}\, z - n < \gamma - 1$) (к оператору $\mathcal{A}^{z-n}$ применимо доказанное в п. 2). Утверждение доказано.

Далее будет использована оценка

$$e^{-\pi|\mathrm{Im}\, z|}|\lambda|^{\mathrm{Re}\, z} \le |\lambda^z| \le e^{\pi|\mathrm{Im}\, z|}|\lambda|^{\mathrm{Re}\, z}, \tag{22}$$

справедливая для всех $\lambda, z \in \mathbb{C}$, если $|\arg \lambda| < \pi$.

Утверждение 7. *Пусть* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ *— нормальный оператор в гильбертовом пространстве* H; *числа* z, w, $u \in \mathbb{C}$ *удовлетворяют условию:* $\mathrm{Re}\, w < \mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, u$. *Тогда для любого* $x \in D(\mathcal{A}^w) \bigcap D(\mathcal{A}^u)$ *имеем*

а) $x \in D(\mathcal{A}^z)$,

б) справедливо неравенство (11) *с* $\lambda = \lambda_0 = \mathrm{Re}\,(z-u)/\mathrm{Re}\,(w-u)$, $C = C(z,w,u) = e^{\pi(|\mathrm{Im}\, z| + \lambda|\mathrm{Im}\, w| + (1-\lambda)\mathrm{Im}\, u)}$. *В частности, если* $z, w, u \in \mathbb{R}$, *то* $C = 1$.

Доказательство. а) Положим $p = \mathrm{Re}\,(w-u)/\mathrm{Re}\,(z-u)$, $q = \mathrm{Re}\,(w-u)/\mathrm{Re}\,(w-z)$, тогда p и q больше единицы и $1/p + 1/q = 1$. Используя неравенства (22), получаем

$$|\lambda^z|^2 = |\lambda^{2z}| \le e^{\pi|\mathrm{Im}\, 2z|}|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, z} = \\ = e^{\pi|\mathrm{Im}\, 2z|}|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w \mathrm{Re}\,(z-w)/\mathrm{Re}\,(w-u)}|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, u \mathrm{Re}\,(w-z)/\mathrm{Re}\,(w-u)},$$

т. е.

$$|\lambda^z|^2 \le C_1(z)|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w/p}|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, u/q} \qquad \left(C_1(z) = e^{\pi|\mathrm{Im}\, 2z|}\right). \tag{23}$$

Пусть $x \in D(\mathcal{A}^w) \bigcap D(\mathcal{A}^u)$, тогда

$$|\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w/p} \in L_p(\sigma(\mathcal{A}), \mu_x), \quad |\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, u/q} \in L_q(\sigma(\mathcal{A}), \mu_x)$$

(здесь $\mu_x = E_{x,x}(\lambda)$ — положительная мера). Отсюда и из (23) следует, что

$$\lambda^z \in L_2(\sigma(\mathcal{A}), \mu x), \quad \text{а} \;\; x \in D(\mathcal{A}^z).$$

б) Из неравенств Гельдера, (23) и (22) следует, что

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^z x\|^2 &= \int_{\sigma(A)} |\lambda^z|^2 \, d\mu_x \le C_1(z) \int_{\sigma(A)} |\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w/p} |\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w/q} \, d\mu_x \le \\ &\le C_1(z) \left(\int_{\sigma(A)} |\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, w} \right)^{1/p} \left(\int_{\sigma(A)} |\lambda^2|^{\mathrm{Re}\, u} \right)^{1/q} \le \\ &\le C_1(z) \left(\int_{\sigma(A)} e^{\pi |\mathrm{Im}\, 2w|} |\lambda^{2w}| \, d\mu_x \right)^{1/p} \left(\int_{\sigma(A)} e^{\pi |\mathrm{Im}\, 2u|} |\lambda^{2u}| \, d\mu_x \right)^{1/q} = \\ &= C^2(z, w, u) \|\mathcal{A}^w x\|^{2/p} \|\mathcal{A}^u x\|^{2/q}.\end{aligned}$$

Следствие. *Пусть $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H; числа $w, u \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Re}\, w < \mathrm{Re}\, u$. Тогда*

а) если $0 \in \rho(\mathcal{A})$, то $D(\mathcal{A}^u) \subset D(\mathcal{A}^w)$;

б) если $\mathcal{A}$ — непрерывный оператор, то $D(\mathcal{A}^w) \subset D(\mathcal{A}^u)$.

Действительно, в случае, когда $0 \in \rho(\mathcal{A})$, существует $r > 0$ такое, что открытый шар с центром в точке 0 и радиуса r принадлежит $\rho(\mathcal{A})$. Следовательно, если $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, то $|\lambda| \ge r > 0$ и

$$|\lambda^w| = |\lambda^{w-u}||\lambda^u| \le e^{\pi |\mathrm{Im}\, (w-u)|} |\lambda|^{\mathrm{Re}\, (w-u)} |\lambda^u| \le e^{\pi |\mathrm{Im}\, (w-u)|} r^{\mathrm{Re}\, (u-w)} |\lambda^u|.$$

Если $x \in D(\mathcal{A}^u)$, то $|\lambda^u|^2 \in L_1(\sigma(\mathcal{A}), \mu_x)$, а следовательно, и

$$|\lambda^w|^2 \in L_1(\sigma(\mathcal{A}), \mu_x).$$

Отсюда $x \in D(\mathcal{A}^w)$.

Если оператор $\mathcal{A}$ непрерывен, то для некоторого $R > 0$ и всех $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ справедливо неравенство $|\lambda| \le R$. Следовательно,

$$|\lambda^u| = |\lambda^{u-w}||\lambda^w| \le e^{\pi |\mathrm{Im}\, (u-w)|} |\lambda|^{\mathrm{Re}\, (u-w)} |\lambda^w| \le e^{\pi |\mathrm{Im}\, (u-w)|} R^{\mathrm{Re}\, (u-w)} |\lambda^w|.$$

Рассуждая далее так же, как в предыдущем случае, получаем необходимое вложение $D(\mathcal{A}^w) \subset D(\mathcal{A}^u)$.

Литература

1. Коркина Л. Ф., Рекант М. А. Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.

2. Красносельский М. А., Соболевский П. Е. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 3. С. 499–502.

3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

5. Komatsu H. Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. 1966. Vol. 19. P. 285–346.

6. Соболевский П. Е., Чеботарева Л. М. О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. матем. фак. Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып 3. С. 112–118.

7. Сильченко Ю. Т. Об одном классе полугрупп // Операторные уравнения в функциональных пространствах. Воронеж: ВГУ, 1986. С. 80–90.

8. Дезин А. А. К теории операторов вида $\frac{d}{dt} - A$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 5. С. 963 – 966.

9. Коркина Л. Ф., Рекант М. А. Об оценке нормы одной операторной функции // Изв. вузов. Математика. 1995. № 2. С. 83–86.

10. Коркина Л. Ф., Рекант М. А. Интегральные представления дробных степеней и связанных с ними операторов // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып. 1.) С. 80–91.

11. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 22.04.2002 г.
Окончательный вариант 23.07.2002 г.